Inlämningsuppgift matematik C, kap 4

Anton Johansson, SpNv2c

18 maj 2010

1

Ange de fyra första talen i den geometriska talföljden $a_n = 500 \times 1.2^{n-1}$.

$$a_1 = 500 \times 1.2^{1-1} = 500$$
$$a_2 = 500 \times 1.2^{2-1} = 600$$
$$a_3 = 500 \times 1.2^{3-1} = 720$$
$$a_4 = 500 \times 1.2^{4-1} = 864$$

2

Ange de fyra första talen för rekursionsformeln $a_{n+1} = 3a_n - 9$ *där* $a_1 = 15$

$$a_1 = 15$$
$$a_2 = 3 \times 15 - 9 = 36$$
$$a_3 = 3 \times 36 - 9 = 99$$
$$a_4 = 3 \times 99 - 9 = 288$$

3 a)

Ange det 16:e talet i den aritmetiska talföljd där $a_1 = -2$ *och* $d = 15$.

$$a_{16} = a_1 + (16 - 1) \times d$$
$$a_{16} = -2 + 15 \times 15$$
$$a_{16} = 223$$

3 b)

Ange även summan de 25 första talen i samma talföljd.

$$a_{25} = a_1 + (25-1) \times d = 358$$
$$s_{25} = \frac{25(a_1 + a_{25})}{2} = 4450$$

4

Beräkna den geometriska summan $6 + 6 \times 2 + 6 \times 2^2 + \ \ldots \ + 6 \times 2^{11}$.

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$$
$$s_{12} = \frac{6(2^{12} - 1)}{6-1} = 4914$$

5

4600 kronor sätts in i början av varje år in på ett bankkonto med räntesatsen 5.2 procent. Hur mycket finns på kontot direkt efter den nionde insättningen?

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$$
$$s_9 = \frac{4600(1.052^9 - 1)}{1.052 - 1} = 51141.91004 \approx 51142$$

6

Finn en formel för det n*:te elementet* a_n *för talföljden som börjar med talen:* $4, 10, 28, 82$ eller *för talföljden som börjar med med talen* $0, 3, 8, 14$.

Det finns oändligt antal formler som börjar på dessa sätt, men den allra enklaste (för $0, 3, 8, 14$) är

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0, \\ 3 & \text{om } n = 1. \\ 8 & \text{om } n = 2. \\ 14 & \text{om } n = 3. \end{cases}$$

En annan formel är

$$a_n = n^2 - 1 - \frac{n}{7}$$

som dock ej utger heltal utan tal som i normalt avrundat läge blir dessa tal. Observera även att enindexering råder.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1^2 - 1 - \frac{1}{7} = -0.1429 \approx 0 \\
a_2 &= 2^2 - 1 - \frac{2}{7} = 2.7143 \approx 3 \\
a_3 &= 3^2 - 1 - \frac{3}{7} = 7.5714 \approx 8 \\
a_4 &= 4^2 - 1 - \frac{4}{7} = 14.4286 \approx 14
\end{aligned}
$$

7

Ange de tre första talen i den geometriska talföljd där $a_7 = 15625$ *och* $k = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 \times k^{n-1} \\
a_7 &= a_1 \times \frac{1}{2}^{6} \\
a_1 &= \frac{a_7}{\frac{1}{2}^{2}} = 1000000 \\
a_2 = a_1 \times \frac{1}{2}^{1} &= 500000 \\
a_3 = a_1 \times \frac{1}{2}^{2} &= 250000
\end{aligned}
$$

8

Vattendjupet i en nygräven brunn sjunker det första året med 0.86 cm. I fortsättningen uppskattar man att nivån varje år sjunker med en fjärdedel av vad den sjunkit föregående år. Hur mycket kommer vattendjupet att minska de första 20 åren?

$a_1 = 0.86$

$k = 0.25$

$n = 20$

$s_n = \frac{a_1(1-k^n)}{1-k}$

$s_{20} = \frac{0.86(1-0.25^{20})}{1-0.25} = 1.15 \text{ cm}$

9

En kaninfamilj med extrem inavel förökar sig som tusan. Hur många kaniner kan man räkna med att det finns i familjen efter tolv generationer om de börjar med ett kärleksfullt kaninpar (som alltså är första generationen) och varje par förökar sig endast en gång, med fyra ungar som resultat. Vi förutsätter att ingen blir ihjältrampad eller på annat tillintetgjord (alltså att de dör) innan alla tolv generationer sett dagens ljus. Algebraisk lösning krävs

$$a_1 = 2$$
$$k = 2$$
$$n = 12$$
$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$$
$$s_{12} = \frac{2(2^{12}-1)}{2-1} = 8190$$

10

En studsboll släpps från 2.0 meters höjd mot ett golv. Efter varje studs når bollen upp till 2/3 av föregående höjd. Hur lång sträcka har bollen "färdats" när den studsar för tolfte gången?

$$a_1 = 2.0$$
$$k = \frac{2}{3}$$
$$n = 12$$
$$s_n = \frac{a_1(1-k^n)}{1-k}$$
$$s_{12} = \frac{2(1-\frac{2}{3}^{12})}{1-\frac{2}{3}} = 7.9$$

11

Miranda satte i början av varje år in 1500 kronor på ett bankkonto med räntesatsen 10,5 %. Första insättningen var 1943. Exakt tre år efter den sista insättningen var saldot 1257765 kronor. När var saldot 1257765 kronor?

$$k = 1.105$$
$$x = 1257765$$
$$n_p = 3$$

då k är ökningsvärdet per år (räntan), x är slutvärdet, ${n_p}^1$ är antalet år mellan sista insättningen och värdet x. Vi bör nu finna s_n (summan efter n år då n är antalet år som gått när insättningar upphör, alltså $n = n_p - 3$) för att i sin tur kunna kalkylera n.

$$x = s_n \times k^{n_p}$$

$$s_n = \frac{x}{k^{n_p}} = \frac{1257765}{1.105^3} = 932207.6688$$

Därefter n:

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log \frac{s_n(k-1)+1}{a_1}}{\log k} = \frac{1.814615148}{0.043362278} = 41.84778178$$

Detta är antal år då insättningarna upphör. Därpå läggs de tre nästa åren till, och

$$41.84778178 + 3 = 44.84778178 \approx 45$$

[1] p står för *post* (efter) som i *efter sista insättningen.*