13: Reella rötter

Anton Nordenfur, S08C

8 februari 2011

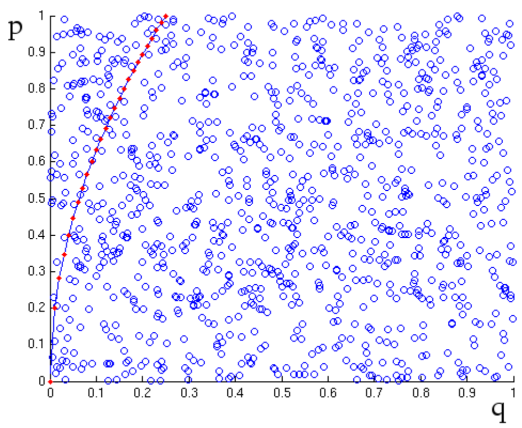
a) Undersök sannolikheten för att andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rella rötter, om p och q väljs slumpvis som reella tal i intervallet mellan 0 och 1.

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

För att x ska ha reella rötter måste kvadratroten kunna lösas, och för detta krävs att dess innehåll är positivt alternativt lika med 0.

$$(\frac{p}{2})^2 - q \geq 0 \Rightarrow$$
$$(\frac{p}{2})^2 \geq q$$
$$\frac{p^2}{4} \geq q$$
$$p^2 \geq 4 \times q \iff p \geq \sqrt{4 \times q}$$

Detta är det gynnsamma läget. Om vi skapar en graf med oändligt många slumpade punkter och drar en kurva där $p = \sqrt{4 \times q}$ är allt över den kurvan ett gynnsamt fall. Vid en datorsimulering med programmet *MATLAB* och 1000 slumpade punkter mellan 0 och 1 får jag följande graf:



När jag dividerar antalet punkter som hamnat över kurvan (82) med antalet totalt (1000) får jag fram att chansen att en punkt hamnar över kurvan (att x har reella rötter) är 8.2 %, nästan $\frac{1}{12}$.

Det område i grafen som är intressant är då $0 \leq q \geq \frac{1}{4}$, eftersom det bara är inom detta intervall som några gynnsamma fall förekommer — då q överstiger 0.25 överstiger p 1, vilket gör att talet hamnar utanför sitt intervall. Teoretiskt kan det beräknas genom att ge p högsta möjliga värde (1) och se vad q blir.

$$\frac{p^2}{4} \geq q$$
$$\frac{1}{4} \geq q$$

Därför skrivs integralen med detta som intervall.

$$\int_0^{\frac{1}{4}} (\sqrt{4q})\ \mathrm{d}q = \int_0^{\frac{1}{4}} (4q)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}q = 2 \times \int_0^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}q$$

$$2\int_0^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}q = 2\left[\frac{2}{3} \times q^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} =$$
$$= 2 \times ((\frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}) - 0) =$$
$$= \frac{4}{3} \times (\sqrt{\frac{1}{4}})^3 = \frac{4}{3} \times (\frac{1}{2})^3 =$$
$$= \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{6}$$

Denna integral beskriver arean under kurvan, eftersom integralen utgår ifrån q. För att beräkna arean *över* kurvan tar vi hela arean minus arean under kurvan.

$$A = p \times q = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$A_2 = A - A_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Därefter divideras arean över kurvan med hela arean för att få en procentsats. Obs. att vi dividerar med hela arean ($1 \times 1 = 1$) eftersom vi vill se oddsen över *hela* möjliga intervallet.

$$\frac{\frac{1}{12}}{1} \approx 0.083 \approx 8.3\%$$

Svar: Oddsen att x har reella rötter, räknat teoretiskt, är $\frac{1}{12}$ eller 8 %, närmast identiskt med oddsen som *MATLAB* får fram experimentellt.

b) Undersök sannolikheten för att andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rella rötter, om p och q väljs slumpvis som reella tal i intervallet mellan 0 och 5.

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

För att x ska ha reella rötter måste kvadratroten kunna lösas, och för detta krävs att dess innehåll är positivt alternativt lika med 0. Vi kommer fram till samma likhetsekvation som i uppgift **a)**.

$$\frac{p^2}{4} \geq q \iff p \geq \sqrt{4 \times q}$$

Liksom i uppgift **a)** kan vi räkna om det finns ett intervall där alla gynnsamma fall förekommer, men här kommer vi att finna att det är utspritt över hela intervallet $0 \leq q \geq 5$.

$$\frac{p^2}{4} \geq q \Rightarrow \frac{25}{4} \geq 5 \geq q$$

Vi använder oss därför av hela intervallet $0 \leq q \geq 5$ denna gång. I övrigt är de första stegen av integralekvationen identisk med uppgift **a)**.

$$\int_0^5 (\sqrt{4q}) \, \mathrm{d}q = \int_0^5 (4q)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}q = 2 \times \int_0^5 q^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}q$$

$$2 \int_0^5 q^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}q = 2 \left[\frac{2}{3} \times q^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 =$$

$$= 2 \times ((\frac{2}{3} \times 5^{\frac{3}{2}}) - 0) =$$

$$= \frac{4}{3} \times 5^{\frac{3}{2}} = 14.90711985$$

Denna integral beskriver arean under kurvan. För att beräkna arean *över* kurvan tar vi hela arean minus arean under kurvan.

$$A = p \times q = 5 \times 5 = 25$$
$$A_2 = A - A_1 = 25 - 14.90711985 = 10.09288015$$

Därefter divideras arean över kurvan med hela arean för att få en procentsats.

$$\frac{10.09288015}{25} \approx 0.40 \approx 40\%$$

Svar: Oddsen att x har reella rötter, räknat teoretiskt, är 40 %.

c) Undersök sannolikheten för att andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rella rötter, om p och q väljs slumpvis som reella tal i intervallet mellan 0 och n, och $n \to \infty$.

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

För att x ska ha reella rötter måste kvadratroten kunna lösas, och för detta krävs att dess innehåll är positivt alternativt lika med 0. Vi kommer fram till samma likhetsekvation som i uppgift **a)**.

$$\frac{p^2}{4} \geq q \iff p \geq \sqrt{4 \times q}$$

$$\int_0^n (\sqrt{4q})\,\mathrm{d}q = 2\int_0^5 q^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}q =$$
$$= 2\left[\frac{2}{3} \times q^{\frac{3}{2}}\right]_0^n =$$
$$= \frac{4}{3} \times n^{\frac{3}{2}}$$

Denna integral beskriver arean under kurvan. Sannolikheten att en punkt hamnar under kurvan s_1 är arean dividerat med hela arean.

$$A = p \times q = n \times n = n^2$$
$$S_1 = \frac{\frac{4}{3} \times n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{\frac{4}{3} \times n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{4}{2}}} =$$
$$= \frac{4}{3} \times n^{\frac{3}{2}} \times n^{-\frac{4}{2}} =$$
$$= \frac{4}{3} \times n^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{n}}$$

Om n går mot oändligheten går $\frac{4}{3\sqrt{n}}$ mot noll, eftersom det divideras med oändligheten.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{3\sqrt{n}} = 0$$

Om oddsen är oändligt små (går mot noll) att x inte har några reella rötter är oddsen oändligt stora att x har reella rötter.

Svar: Oddsen att x har reella rötter är oändligt stor.